

UN ALGORITMO PARA ENRUTAMIENTO NO LOCAL

Autor : Ing. Diego Andrade Stacey (*)

Pontificia Universidad Católica del Ecuador
Centro de Computación e Informática
Apartado 2184
Quito - Ecuador

RESUMEN

Se presenta en este trabajo un método para determinar la ruta más corta entre dos puntos del plano en presencia de obstáculos rectilíneos. La etapa inicial constituye la generación de una gráfica no dirigida - la gráfica de figuras -, a partir de los obstáculos; los nodos de la gráfica son figuras geométricas (cuadriláteros y triángulos) y, existe un lado de la gráfica siempre y cuando las figuras correspondientes son adyacentes y no existe un obstáculo entre ellas. En una etapa siguiente se desarrolla el algoritmo de enrutamiento el cual consiste en recorrer la gráfica de figuras partiendo del nodo en el cual se ubica el punto inicial; el recorrido de la gráfica se lleva adelante con el concepto de propagación de ranuras mediante el cual se pasa del lado de una figura hacia otro lado que sirve de comunicación con una figura adyacente. Si m es el número de obstáculos el número de figuras geométricas n es de orden $O(m)$, mientras que los algoritmos tanto de construcción de la gráfica como del proceso de enrutamiento son en esperanza de $O(n \log(n))$ pero pueden llegar a ser de $O(n^2)$.

(*) Director del Centro de Computación e Informática de la Pontificia Universidad Católica del Ecuador.

Profesor de la Universidad Central del Ecuador.

1. INTRODUCCION.

El problema de determinar la ruta o trayectoria de longitud mínima entre dos puntos de un plano referenciado por un sistema de ejes coordenados (x,y) ha sido tratado extensamente en diversas áreas tales como la investigación de operaciones, diseño de circuitos integrados [1],[2],[4], movimiento de robots [3],[5]; entre otras aplicaciones. Un aspecto especial es aquel de obtener la ruta más corta entre dos puntos en presencia de obstáculos los cuales pueden corresponder sea a polígonos cerrados o a segmentos rectilíneos.

La solución tradicional que se ha dado a la obtención de rutas de longitud mínima está enmarcada en la teoría de gráficas, con algoritmos como el de Dijkstra.

En el ámbito de la determinación de la ruta más corta en presencia de obstáculos en los métodos de enrutamiento locales los vecinos de un punto son algunos de los puntos de una figura geométrica que rodea al punto.

Algunos de estos métodos locales y los consiguientes algoritmos que de ellos se desprenden idealizan al plano como una malla o retícula [2], dividiendo al plano en intervalos de longitud unitaria en cada dirección. Los puntos de intersección de las líneas trazadas por estos intervalos corresponden a los vértices de una gráfica. Véase fig. 1.1

En este tipo de modelo la ruta se genera pasando de punto a punto de la retícula y tomando en cuenta como entorno de un punto a los puntos adyacentes a ese vértice, exclusivamente.

En contraposición otros métodos consideran un enfoque global del plano para la obtención de la ruta, es decir los vecinos de un punto corresponden a toda una área.

Se presenta en este artículo un algoritmo no local para obtener la ruta más corta entre dos puntos en presencia de obstáculos rectilíneos, el mismo que está basado en la partición del plano de estudio en un conjunto de figuras geométricas (cuadriláteros y triángulos). Estas figuras se forman conforme se introducen los obstáculos, de uno en uno. Véase fig. 1.2

Para obtener un grafo a partir de la división del plano en figuras, cada figura es un nodo de una gráfica no dirigida. Entre dos nodos hay un lado siempre y cuando las figuras correspondientes sean adyacentes y no exista un obstáculo entre ellas.

El algoritmo de enrutamiento que se describe en este trabajo consiste en efectuar el recorrido de la gráfica de figuras desde la que contiene al punto inicial hasta aquella en la que se ubica el punto final. El recorrido de la gráfica se lleva a cabo con el concepto de propagación de ranuras, es decir, pasar de un lado de una figura hacia otro lado que sirve de comunicación con una

figura adyacente.

Finalmente, el método descrito en este trabajo permite obtener una ruta de longitud mínima entre dos puntos tanto con la norma de medida l_1 -ruta de Manhattan- como con la norma de medida l_∞ .

Si m es el número de segmentos rectilíneos (obstáculos), el número de figuras geométricas (n) en las que se descompone el plano es generalmente del orden de $n = 3m + 1$ y en el peor de los casos $n = 9m + 1$. Los algoritmos de construcción de la gráfica de figuras y del proceso de enrutamiento son en esperanza de $O(n \log(n))$ pero pueden llegar a ser de $O(n^2)$.

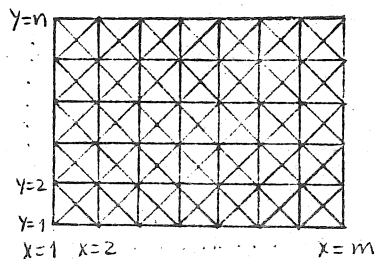


Fig. 1.1 Modelo de enrutamiento local

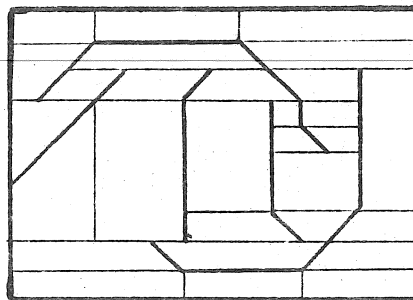


Fig. 1.2 Modelo de enrutamiento no local

2.LA GRAFICA DE FIGURAS.

Se introduce aquí uno de los conceptos importantes de este trabajo y que se lo ha denominado gráfica de figuras, es decir el conjunto de figuras geométricas y su concepción como una gráfica en que se divide el plano original como consecuencia de la introducción de los obstáculos en el plano.

2.1 OBSTACULOS Y SU REPRESENTACION.

El espacio bajo consideración es el plano referenciado con un sistema de ejes coordenados X,Y.

Se define a los obstáculos como los segmentos de recta horizontal, vertical u oblicuo a 45 o 135 grados, definidos por las coordenadas de sus puntos extremos.

Los obstáculos pueden estar aislados o coincidiendo en uno de sus extremos en cuyo caso se tendría un polígono abierto.

2.2 TIPOS DE FIGURAS GEOMETRICAS Y SU REPRESENTACION.

Los tipos de figuras que se considerarán en la gráfica de figuras son cuadriláteros y triángulos.

Los cuadriláteros corresponden a las siguientes figuras :

- Rectángulos
- Trapecios rectángulos
- Trapecios isósceles
- Romboides

Todos los triángulos son rectángulos.

La representación general de estas figuras geométricas será en base a las coordenadas de sus vértices.

En la figura 2.1 se indican los diferentes tipos de figuras geométricas consideradas.

No siempre las figuras geométricas así definidas se encontrarán en la posición mostrada en la Fig. 2.1, sino que pueden aparecer rotadas a 90, 180 o 270 grados.

Finalmente, al menos un lado de la figura debe coincidir con todo o parte de un obstáculo.

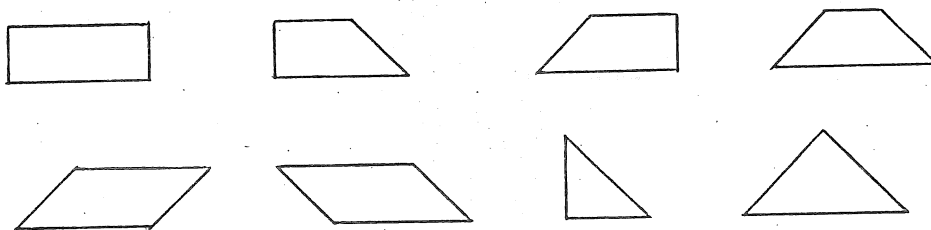


Fig. 2.1 Tipos de figuras geométricas.

2.3 CONSTRUCCION DE LA GRAFICA DE FIGURAS.

2.3.1 GENERACION DE LAS FIGURAS DE LA GRAFICA.

La gráfica de figuras se construye siguiendo un procedimiento repetitivo y uniforme conforme se van introduciendo uno a uno los obstáculos. El orden en que se introducen los obstáculos es irrelevante aunque un determinado orden puede ser más favorable que otro. El procedimiento que se sigue con cada obstáculo está encaminado a dividir en otras figuras geométricas a la figura en la cual se encuentra el punto inicial del obstáculo. Los aspectos importantes con los que se efectúa esta división son los siguientes :

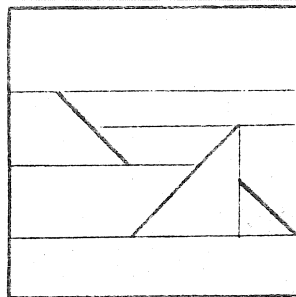
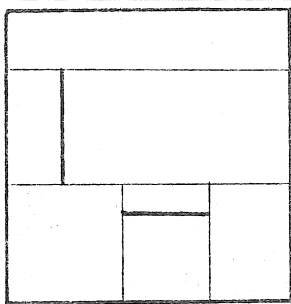
a) se trazan líneas perpendiculares por los extremos de cada uno de los segmentos rectilíneos horizontales y verticales correspondientes a obstáculos de esos tipos.

b) se trazan líneas horizontales o verticales por los extremos de los segmentos rectilíneos correspondientes a los obstáculos oblicuos, sean a 45 o 135 grados. No se trazan líneas perpendiculares por los extremos de los obstáculos oblicuos para asegurar que las particiones de la figura sigan siendo a lo más cuadriláteros.

c) se extienden estas líneas trazadas por los extremos de los obstáculos en los dos sentidos hasta encontrar una de las siguientes limitaciones :

- los límites del espacio de estudio.
- a otro obstáculo.
- otras líneas similares construidas previamente con relación a otros obstáculos.

En la figura 2.2 se ilustra una manera de efectuar la división de una figura.



(a) por un obstáculo vertical u horizontal. (b) por un obstáculo oblicuo

Fig. 2.2 Proceso de división de una figura.

d) se efectúan uniones de dos o mas figuras en una sola siempre que la figura resultante continúe perteneciendo al conjunto de figuras definido en la sección anterior. Claramente, estas uniones pueden efectuarse a través de los lados ficticios

de las figuras generados mediante lo descrito en a) y b).

e) se determinan las figuras adyacentes o vecinas con las que una figura tiene comunicación, a través de aquellos lados que no son obstáculos. Se liga a la figura considerada el conjunto de sus figuras vecinas. Las partes de la figura original, así conformadas finalmente, substituyen a la figura que se ha dividido.

En consecuencia, un elemento o nodo de la gráfica de figuras estará constituido por la figura en sí y por una lista de figuras vecinas.

f) se actualizan las listas de vecinos de las figuras en las cuales aparezca la figura que se ha dividido. En esas listas una o varias partes de la figura dividida van a substituir a esa figura original.

2.3.2 OBSERVACIONES RELATIVAS A LA DIVISION DE FIGURAS.

En el proceso descrito en la sección anterior, relativo a la división de figuras pueden darse las siguientes situaciones:

a) el número de partes en las que un obstáculo divide a la figura en la que se encuentra el punto inicial depende sobretodo de si el obstáculo esta contenido o no íntegramente en esa figura, influye también el tipo de figura que se va a dividir.

b) se efectúan los pasos descritos para la división solamente con figuras en la posición normal; si la figura se encuentra en una posición de rotación se modifica previamente, tanto la figura como el obstáculo con un sencillo proceso de rotación de ejes, a fin de pasar de la posición de rotación a la posición normal. Una vez completada la división de la figura se aplica otro proceso de rotación para volver a las partes a su posición original de rotación. De esta manera se reducen los casos de división.

c) si un obstáculo coincide con un lado de la figura a la que va a dividir, es decir es común a dos figuras deben dividirse estas dos figuras independientemente.

d) Si el punto final del obstáculo se encuentra fuera de la figura que actualmente se esta dividiendo, debe aplicarse el proceso de división a la o las figuras adyacentes a las que afecta el mismo obstáculo hasta que se considere una figura para la cual el punto final del obstáculo sea interior.

En la figura 2.3 se muestra un plano y su división en regiones geométricas.

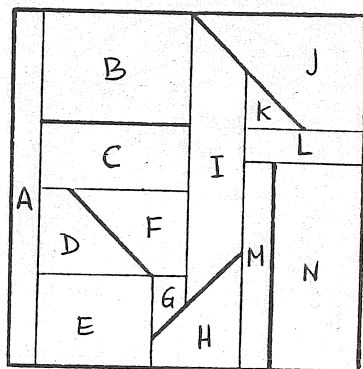


Fig. 2.3 Conformación de las regiones geométricas.

2.3.3 NUMERO DE FIGURAS GEOMETRICAS QUE SE GENERAN.

Respecto al número total de figuras que se generan una vez introducidos todos los obstáculos este depende del orden en que fueron introducidos los obstáculos y de qué tipo de obstáculo esta incidiendo sobre un determinado tipo de figura, en la partición. Así, si m es el número de obstáculos y estos son horizontales o verticales exclusivamente el número de figuras se puede probar que es de $3m + 1$. En cambio, al considerar también obstáculos oblicuos el número de figuras geométricas puede subir hasta $9m + 1$.

2.4. EL MODELO DE GRAFICA A PARTIR DE LAS FIGURAS GEOMETRICAS.

Una vez que se ha formado el conjunto de figuras geométricas mediante el procedimiento descrito anteriormente puede efectuarse la correspondencia del plano así particionado en figuras con una gráfica no dirigida en la siguiente manera:

- cada figura geométrica corresponde a un vértice de la gráfica.
- un vértice tiene relación con otro si en las figuras correspondientes una figura es adyacente con otra a través de un lado ficticio, es decir los lados de figuras que representan obstáculos no expresan relación o comunicación con una figura adyacente. En base a esta consideración se construyen las aristas o lados de la gráfica.

En este trabajo la gráfica de figuras esta constituida como una lista ligada donde cada nodo es una figura geométrica del plano, la cual, como se recordará tiene asociada una lista de figuras vecinas.

En la figura 2.4 se indica la gráfica correspondiente a la división en figuras de la figura 2.3.

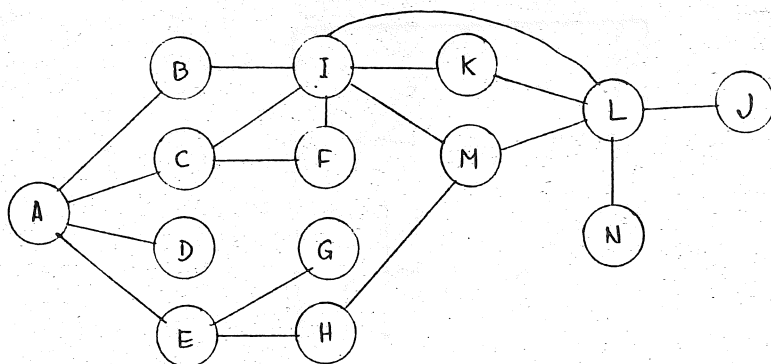


Fig. 2.4 Gráfica representativa de las figuras geométricas.

2.5 ALGORITMOS UTILIZADOS PARA LA CONSTRUCCION DE LA GRAFICA DE FIGURAS.

Tal como se ha descrito en la sección 2.3 el procedimiento general de formación de la gráfica de figuras consta de tres etapas bien definidas:

- a) la división de una figura en sus partes,
- b) la obtención de la lista de figuras vecinas para cada parte y,
- c) la actualización de la gráfica en general como consecuencia de la inclusión de las partes y la supresión de la figura que se dividió.

A continuación se presenta el algoritmo general de generación de la gráfica de figuras.

2.5.1 ALGORITMO GENERAL PARA LA CONSTRUCCION DE LA GRAFICA.

Mientras se ingresan obstáculos se efectúa el siguiente procedimiento:

1. Se ingresan los datos de los puntos extremos del obstáculo.
2. Se obtiene el apuntador de la figura en la que empieza el obstáculo.
Si el obstáculo es común a dos figuras se obtiene el apuntador de la segunda figura en la cual empieza también el obstáculo.
Para cada figura determinada por su apuntador se aplican los siguientes pasos, del 3 al 8:
3. Se efectúa la división de la figura obteniéndose las partes correspondientes a la figura original.
4. Se obtiene la lista de figuras vecinas para cada una de las partes
5. Se insertan las partes en la estructura general de la gráfica en el sitio determinado por el apuntador a la figura original.

6. Se actualizan las listas de figuras vecinas para aquellas figuras de la gráfica que tienen como vecina a la figura original.
7. Se elimina de la gráfica la figura que se dividió.
8. Si el obstáculo no continúa en otra figura se termina con el procedimiento.
Si el obstáculo continúa en otra figura se busca en la lista de figuras vecinas cual es la siguiente figura a dividirse, se obtiene su apuntador y se repiten los pasos del 3 al 8 inclusive.

2.6 COMPLEJIDAD DE LOS ALGORITMOS.

Si m es el número de obstáculos presentes en el plano, el número de figuras geométricas obtenidas es de $O(m)$, pues corresponde a lo más $3m + 1$ en el caso usual o en el más desfavorable $9m + 1$.

La gráfica de figuras puede almacenarse utilizando diversas estructuras de datos. Posiblemente las estructuras más convenientes que se pueden utilizar son las de árbol y entre estos los árboles $R(6)$ o los árboles cuaternarios (quad trees) [7].

Sea n el número de figuras geométricas de la gráfica de figuras en un instante dado de su generación, al introducir un nuevo obstáculo se tienen los siguientes órdenes de complejidad en los diferentes pasos que se siguen para la obtención de un nuevo nodo de la gráfica:

En la fase de búsqueda de la figura en la cual está el punto inicial el algoritmo es del orden de $O(\log(n))$.

En la etapa de la obtención de la lista de vecinos puede presentarse la situación más desfavorable que un mismo obstáculo tenga que recorrer hasta $n/2$ nodos, con lo cual el orden del algoritmo sería de $O(n)$.

En consecuencia, el orden del algoritmo de generación de la gráfica, para n obstáculos es de:

$$O(n^2).$$

El orden de $O(n^2)$ es el precio que se paga al introducir los obstáculos de manera totalmente aleatoria y que ese orden aleatorio provoque la complejidad indicada. Sin embargo, en la mayoría de casos reales se tiene la convicción que el orden del algoritmo es en esperanza de $O(n)$.

Cabe señalar finalmente que existen algoritmos con orden $\Theta(n \log(n))$ los mismos que generan la gráfica en un solo paso y no de manera incremental como se describe en este trabajo.

3. METODO DE PROPAGACION DE RANURAS PARA OBTENER LA RUTA MINIMA.

Se presenta en este punto el método para determinar la ruta de longitud mínima entre dos puntos en presencia de obstáculos basado en el concepto de propagación de ranuras.

3.1 CONCEPTOS PREVIOS.

En el método de enrutamiento que se propone en el presente trabajo frecuentemente va a ser necesario obtener la distancia mínima con relación a un punto que se denominará origen, a lo largo de todo un lado de una figura.

Este problema se va a incluir dentro de uno más general como es el de obtener las distancias entre el punto origen y todos los puntos de una recta. Este planteamiento se va a estudiar en dos instancias del mismo:

- a) cuando entre el origen y la recta no existen obstáculos y
- b) cuando entre el origen y la recta existen obstáculos.

El problema se va a resolver tanto para la norma l_1 como para la norma l_∞ .

Con fines explicativos se indica en los puntos 3.1.1 y 3.1.2 la obtención de funciones que permitan calcular la distancia desde el origen hasta cualquier punto de la recta en las dos instancias antes indicadas.

3.1.1 FUNCIONES DE DISTANCIA DESDE UN PUNTO ORIGEN HASTA UNA RECTA CUANDO NO EXISTEN OBSTACULOS DE POR MEDIO.

Sea un punto origen P dado por sus coordenadas (x_p, y_p) y una recta definida por sus extremos A y B , de coordenadas (x_a, y_a) y (x_b, y_b) , respectivamente. Sin pérdida de generalidad se supone a la recta horizontal, es decir $y_a = y_b = y_r$ e igualmente se supone a P situado fuera de la recta, por ejemplo por debajo de ella.

Se trata de determinar la función de distancia de los puntos de la recta AB en relación con el punto origen P .

La función de distancia variará conforme se recorra la recta a lo largo de su eje desde el un extremo hasta el otro y dependerá en su expresión algebraica de la posición de P respecto a los extremos de la recta.

La función de distancia, en el intervalo $[x_a, x_b]$, corresponderá a uno de los siguientes tipos:

- Función tipo f_1 , cuando en todo el intervalo es una recta de pendiente negativa.
- Función tipo f_2 , cuando en todo el intervalo es una recta de pendiente positiva.

- Función tipo f_3 cuando en todo el intervalo es una recta paralela al eje x .
- Función tipo f_4 cuando en el subintervalo $[x_a, x_1]$ es del tipo f_1 y en el subintervalo $[x_1, x_b]$ es del tipo f_3 .
- Función tipo f_5 cuando en el subintervalo $[x_a, x_1]$ es del tipo f_1 y en subintervalo $[x_1, x_b]$ es del tipo f_2 .
- Función tipo f_6 cuando en el subintervalo $[x_a, x_1]$ es del tipo f_3 y en el subintervalo $[x_1, x_b]$ es del tipo f_2 .
- Función tipo f_7 cuando en el subintervalo $[x_a, x_1]$ es del tipo f_1 , en el subintervalo $[x_1, x_2]$ es del tipo f_3 y en el subintervalo $[x_2, x_b]$ es del tipo f_2 .

La Fig. 3.1 ilustra estos tipos de funciones.

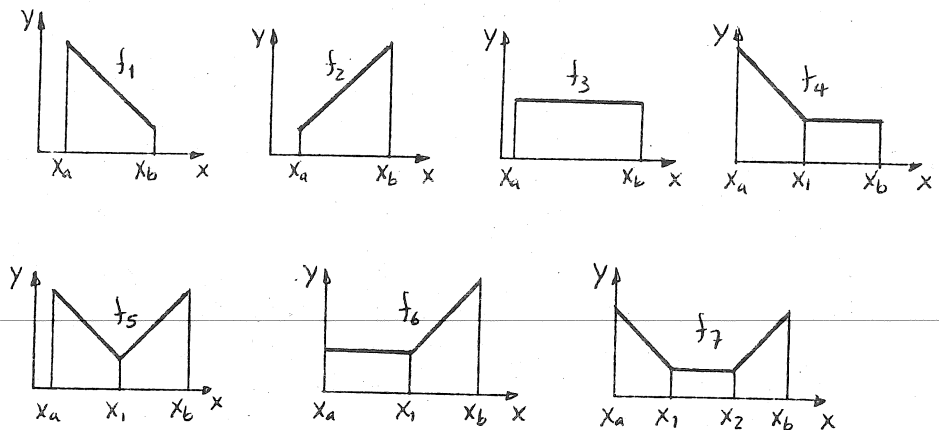


Fig. 3.1 Tipos de funciones de distancia.

Se destaca el hecho de que las funciones de distancia mostradas presentan un punto o un conjunto de puntos para los cuales el valor de la distancia es mínima.

3.1.2 FUNCIONES DE DISTANCIA DESDE UN PUNTO ORIGEN HASTA UNA RECTA CUANDO EXISTEN OBSTACULOS DE POR MEDIO.

Las funciones de distancia desde un punto origen hasta una recta, cuando entre el origen y la recta existen obstáculos se expresan en términos de las funciones de distancia obtenidas en la sección 3.1.1 con un proceso adicional de traslado del punto origen hacia los extremos del obstáculo. En otras palabras el punto origen se substituye por dos o más orígenes, cada uno ubicado en los extremos del obstáculo, desde cada uno de estos

orígenes se pueden plantear las funciones de distancia ya vistas para cuando no existen obstáculos entre el origen y la recta. Para obtener el valor de la distancia de un punto de la recta respecto al origen inicial se añadirán los valores de la distancia desde el origen inicial hasta el nuevo origen y el valor de la distancia desde el nuevo origen hasta el punto considerado en la recta.

Al haber transformado la obtención de la distancia respecto a un punto origen al cálculo referente a varios orígenes se tendrá una función diferente con su correspondiente dominio para cada origen.

La función de distancia, dividida así en varias, esta constituida de todas maneras por las funciones tipo f_1 a f_7 vistas anteriormente y es continua en su conjunto.

En la Fig. 3.2 se ilustra el proceso aquí descrito referente a la consideración de varios orígenes, así como las diferentes funciones de distancia respecto a cada origen.

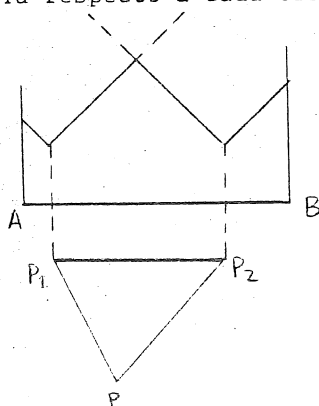


Fig. 3.2 Distancia desde un origen a una recta cuando existe un obstáculo entre el origen y la recta.

3.2 EL CONCEPTO DE RANURA.

Sea una recta representativa del lado de una figura. Se desea acceder a la recta desde uno o varios puntos orígenes y obtener sobre la recta, con relación a cada punto origen, tanto la función de distancia como los puntos para los cuales la distancia respecto al origen es mínima.

Como se puede ver en la Fig. 3.3 estas funciones de distancia se intersectan y traslapan si se consideran varios orígenes. Cada punto origen definirá sobre la recta una función de distancia con un dominio tal que los puntos de la recta pertenecientes a ese dominio estarán más cercanos al origen respectivo que a los restantes orígenes. Esta es la noción fundamental de una ranura.

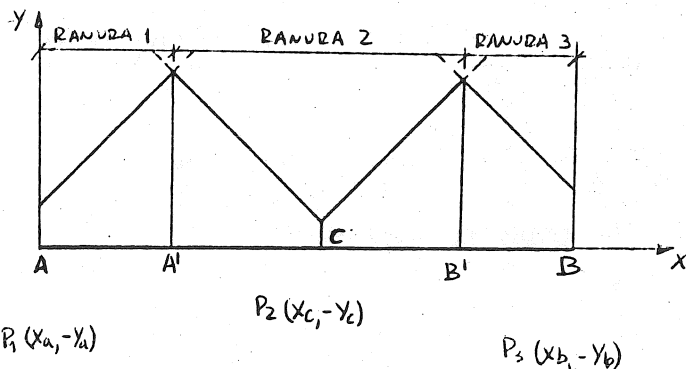


Fig 3.3 Ranuras formadas en una recta con tres orígenes.

Sin embargo, para los fines que se persiguen con este trabajo el concepto de ranura tiene asociado varios hechos y elementos [3]:

- la definición sobre la ranura de un punto o un conjunto de puntos que son los de distancia mínima desde el punto origen de la ranura.
- el guardar este valor de distancia mínima.
- el recordar cual es el punto origen de la ranura.

Si bien una ranura se define por la existencia de una función de distancia con su correspondiente dominio, lo que supone la obtención de un segmento de recta; en lo sucesivo se tomarán en cuenta solamente el o los puntos de la ranura que tienen distancia mínima con relación al origen.

3.3 OBSERVACIONES RESPECTO A LAS RANURAS.

Todo lado de una figura puede tener dos caras, siendo cada cara la que da a cada figura adyacente a través del lado común. Sobre cada cara pueden existir ranuras.

El proceso de determinación de la ruta más corta entre dos puntos mediante el algoritmo que se describirá en el punto 3.4 puede ser visualizada como la obtención de una cadena de ranuras, una para cada cara de las figuras que atraviesa la ruta óptima.

Las ranuras se deben mantener conexas, es decir no debe quedar espacio en la recta sin que pertenezca a una ranura.

El número de componentes conexas de una ranura que se pueden generar sobre una recta es $O(m^2)$, donde m es el número de obstáculos. Es decir, se tienen $O(m^2)$ ranuras que llegan a un lado por los dos sentidos (por las dos caras). [3]

Sin embargo, si se toma en cuenta cada sentido separadamente y se tiene como condición necesaria la existencia de monotonicidad el número de componentes conexas se reduce a 0 (n) ranuras.

Por monotonicidad se entiende el hecho que si dos ranuras conexas se intersectan el resultado continua siendo conexo.

3.4 DESCRIPCION DEL METODO DE ENRUTAMIENTO.

3.4.1 INTRODUCCION.

El algoritmo es semejante al de Dijkstra.

Se trata de determinar la ruta de longitud minima desde un punto inicial "s" hasta un punto final "t", tratando de no intersectar los obstáculos presentes.

Se dispone de una cola prioritaria para guardar las ranuras, ordenada ascendentemente en relación a la distancia al origen.

Existe un caso trivial: si entre los puntos "s" y "t" no existen obstáculos la longitud de ruta puede calcularse directamente como:

- Con norma l_1 :

$$d = |X_t - X_s| + |Y_t - Y_s|$$

- Con norma l_∞ :

$$d = \max(|X_t - X_s|, |Y_t - Y_s|)$$

En los siguientes párrafos, del 3.4.2 hasta el 3.4.6, se explican los pasos del algoritmo.

3.4.2 INICIO DEL PROCESO.

Se inicia el proceso determinando, en la gráfica de figuras a la figura que contiene al punto inicial "s", obteniéndose para todos los lados de la figura, mediante los cuales se comunica con las figuras vecinas (lados que no son obstáculos), las funciones de distancia y por consiguiente las ranuras respectivas. Se determinan además los valores de distancia minima desde "s" hasta puntos de referencia ubicados en las ranuras obtenidas.

Se guardan en la cola prioritaria las ranuras. La cola esta ordenada ascendentemente en relación a la distancia al origen medida sobre la ranura.

3.4.3 PROPAGACION DE RANURAS.

Un vez inicializado así el procedimiento de enrutamiento, este continua mediante una sucesión de etapas similares a las del algoritmo de Dijkstra y que efectúan la propagación de la ruta a

través de las ranuras.

La ranura a propagarse es aquella para la cual se tiene la distancia mínima en el frente de la cola, asignando además a su punto de distancia mínima como origen local para la propagación. Si la cola esta vacía se termina el algoritmo con falla.

Definida así la ranura a propagarse se efectúan la secuencia de pasos indicada en la inicialización :

a) se obtienen las funciones de distancia para cada lado de la figura a la que pertenece la ranura que se propaga, siempre que mediante estos lados exista comunicación hacia las figuras vecinas.

b) se establece el dominio de cada función, es decir se definen las nuevas ranuras.

c) se determina sobre cada ranura un punto referencial que es aquel de distancia mínima respecto al origen local.

d) se actualiza el contenido de la cola prioritaria. Si las ranuras generadas son nuevas se introducen en la cola, si son existentes se modifican. Las distancias a guardarse correspondientes a los puntos referenciales deben ser las totales desde el punto inicial "s". Es decir, si 0 es el origen local, "p" el punto referencial encontrado para la nueva ranura y d la distancia desde "s" hasta 0, la distancia total desde "s" hasta "p" es $|0p| + d$, valor que corresponderá a d cuando a esta nueva ranura le toque propagarse [3].

Como se explicó en el punto 3.3, con el fin de mantener ranuras conexas, es decir, que en el proceso de obtención de ranuras no queden espacios sin analizarse y además para evitar que se produzcan ciclos a lo largo de sucesivas propagaciones, es decir que al propagar una determinada ranura se regrese a la ranura original de la cual provino, se asumen sentidos para la propagación de ranuras. Se tiene entonces que en un lado de una figura se pueden considerar dos caras las que corresponden al acceso a ese lado desde dos sentidos diferentes, para cada cara del lado podrán determinarse funciones de distancia y, de hecho, cada ranura que corresponda a cada cara se maneja independientemente. La Fig. 3.4 ilustra los sentidos de propagación y las caras de los lados de las figuras.

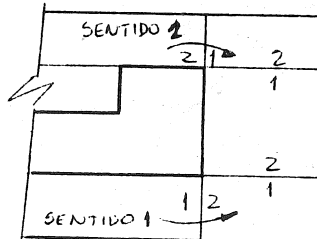


Fig. 3.4 Sentido de propagación de ranuras.

3.4.4 INTERSECCION DE RANURAS.

A lo largo de la propagación de la ruta a través de las ranuras puede presentarse el hecho de que se llegue al mismo lado de una figura y a su misma cara, por diferentes caminos, es decir desde diferentes ranuras pero mediante el mismo sentido de propagación. Esto es equivalente a tener sobre un mismo lado varias ranuras, es decir definir varias funciones de distancia en relación a diferentes puntos de origen, tal como se explicó en el punto 3.2. Debido a que cada función de distancia tiene su correspondiente dominio existirán puntos de intersección de estas funciones, esto se denomina intersección de ranuras.

La intersección se presenta en diferentes etapas de propagación de la ruta, pues en una etapa cualquiera se generará sobre el lado una sola ranura. Se supone que posteriormente en otra etapa se llegó al mismo lado, generándose otra ranura que modificará a la ranura original en el sentido que cada una de ellas cubrirá en su dominio un porcentaje del lado de la figura. Los diferentes dominios de las ranuras quedarán definidos por los puntos de intersección de las funciones de distancia correspondientes.

En la Fig. 3.5 se tienen, por ejemplo, dos ranuras que se intersectan en un punto C. Supongamos que la primera ranura en generarse sobre el lado AB es aquella con punto origen el punto P₁, esta ranura tendrá como dominio la totalidad del lado pues se trata de la única ranura generada en AB, el punto de referencia para esta ranura es el vértice A. Posteriormente se genera una segunda ranura, la que tiene como punto de origen el punto P₂ y como punto de referencia el vértice B. Cada ranura tendrá como dominio un porcentaje del lado AB. Interesa determinar el valor de la abscisa del punto de intersección X_c.

El valor de X_c se calcula con la expresión:

$$X_c = \frac{X_a + X_b}{2} + \frac{Y_b - Y_a}{2}$$

es decir una ranura tendrá como dominio el intervalo $X_a \leq x \leq X_c$ y la otra tiene como dominio el intervalo $X_c \leq x \leq X_b$.

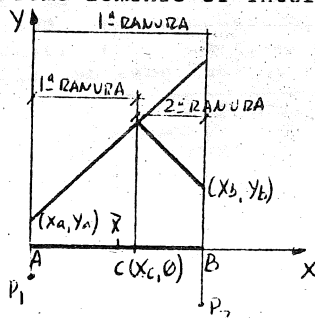


Fig. 3.5 Intersección de ranuras.

Esta situación de intersección de ranuras no se presenta, en cambio, cuando se consideran las dos caras de un lado de una figura es decir diferentes ranuras y funciones de distancia sobre el mismo lado pero desde diferentes sentidos de propagación.

Si dos ranuras obtenidas en diferentes etapas de generación y con el mismo sentido de propagación coinciden en el mismo punto de referencia provocan la siguiente decisión:

sea d_1 la distancia hasta el punto de referencia de la primera ranura generada y d_2 la distancia hasta el mismo punto pero considerando la segunda ranura.

si $d_1 > d_2$ se elimina la primera ranura y queda solamente la segunda.

si $d_1 \leq d_2$ permanece la primera ranura y la segunda no se mantiene para futuras propagaciones.

3.4.5 CULMINACION DEL PROCESO DE ENRUTAMIENTO.

Si en el proceso de propagación de ruta se llega hasta la ranura desde la cual se accede a "t" entonces la obtención de la ruta termina con éxito, calculándose la distancia hasta "t", pero el proceso de propagación de ranuras continúa y se detiene solamente cuando la distancia mínima contenida en la ranura corriente que se va a propagar es mayor que la distancia alcanzada hasta "t". Esto se comporta así debido a que pueden existir varias rutas desde "s" hasta "t".

3.4.6 PERMANENCIA DE UNA RANURA ACTIVA.

Las funciones de distancia que definen una ranura consideran un valor de distancia mínima hasta un punto de la ranura y un valor de distancia máxima hasta otro punto de ella.

Una ranura permanecerá activa, aún después de haberse propagado mientras la distancia mínima guardada y actualizada en la ranura corriente que se va a propagar sea menor que la distancia máxima para la ranura.

En aquellos casos en los que exista intersección de ranuras es claro que la ranura adicional que modifica a una ya existente puede propagarse en su dominio aún después que la ranura original se haya propagado y siga activa; esto se debe a que, como ya se indicó, cada ranura se maneja de manera independiente. Por otro lado, si la ranura original ya no está activa, la nueva ranura actuará en un dominio que cubrirá un mayor porcentaje (posiblemente todo el lado) y tendrá la posibilidad de propagarse de manera normal, como cualquier otra ranura.

3.5 ALGORITMO DETALLADO DE ENRUTAMIENTO.

Los conceptos vertidos en los puntos anteriores se sintetizan en el siguiente algoritmo:

Sea el espacio R^2 en el cual se tienen m obstáculos horizontales, verticales y oblicuos. Sea n el número total de figuras geométricas en que estos obstáculos dividen al espacio R .

Se definen "s" el punto inicial y "t" el punto final o destino, dados por sus coordenadas.

0. Hagamos:

COLA = NIL, lista ordenada de ranuras activas.
 RUTA = NIL, lista de ranuras propagadas.
 $O = s$, O será el origen para ranuras.
 $d = 0$, d guardará la distancia total desde "s".

1. Para la figura a la que pertenece "s" se obtienen, con origen en "s" las ranuras hacia las figuras adyacentes y se guardan en COLA las mismas en un orden ascendente respecto a la distancia (dist) hasta su punto de referencia.

2. Si COLA esta vacío entonces se finaliza sin éxito la obtención de la ruta (si no se ha encontrado ninguna), si no se sigue a 3.

3. Se saca de la COLA la ranura que tenga dist mínima.

4. Se añade esta ranura a RUTA.

5. Se propaga a esta ranura, para esto se hace $O = P_i$, $d = \text{dist}$.

6. Se ingresan las nuevas ranuras a la COLA y se actualiza esta, es decir se reordena de manera ascendente en relación a las distancias totales desde "s" hasta los puntos de referencia de las ranuras, las cuales se calculan como $\text{dist} = d + |OP_i|$.

Si más de una ranura de la COLA contiene la misma dist mínima para todas ellas se sigue el mismo procedimiento de propagación.

Si una ranura no puede propagarse se vuelve a 2.

7. Si en la propagación se ha llegado a la ranura que contiene a "t" se calcula la distancia hasta t, se guarda ese valor y se pasa a 8; de lo contrario se pasa directamente a 8.

8. Si no existe valor para la distancia hasta "t" se vuelve al paso 3.

Si existe valor para la distancia hasta "t" se compara el valor del contenido de la COLA con esa distancia, si el contenido de la COLA sigue siendo menor que la distancia hasta "t" se vuelve a 3, de lo contrario finaliza el procedimiento y se reconstruye la sucesión de puntos que determinan la ruta, mediante los apuntadores hacia atras contenidos en cada ranura propagada y que se encuentran en RUTA.

3.5.1.1 VALIDEZ DEL ALGORITMO QUE OBTIENE LA RUTA MÍNIMA.

El algoritmo presentado y que obtiene la ruta mínima entre dos puntos del plano opera de manera similar al de Dijkstra. Los vértices de la gráfica con los que en general se trabaja en el algoritmo de Dijkstra corresponden a las ranuras generadas sobre los lados de las figuras geométricas.

Las diferencias fundamentales del algoritmo de enrutamiento propuesto con el de Dijkstra consisten, por un lado en el hecho de que en la propagación de ranuras se van generando diferentes rutas desde el punto inicial s hasta el punto final t y; por otro, los pesos de los lados de la gráfica se van determinando conforme se van propagando las ranuras, es decir, inicialmente no se conocen esos pesos.

El algoritmo de Dijkstra supone la formación de un subconjunto S del total de vértices de la gráfica. Los elementos de S son vértices para los cuales ya se conoce la distancia más corta desde el vértice inicial. Al inicio del algoritmo S contiene solamente al vértice inicial y luego, en cada etapa de avance del algoritmo se añade a S un nuevo vértice v cuya distancia desde el vértice inicial es la más corta. En definitiva la secuencia de vértices de la gráfica que conforman la ruta más corta desde el vértice inicial hasta v esta contenida íntegramente en S .

En el método de enrutamiento de propagación de ranuras se forma también este subconjunto S , uno para cada ruta que parte desde el punto inicial s . Estos subconjuntos estan guardados en la lista de ranuras propagadas RUTA, esta lista esta inicialmente vacía (paso 0 del algoritmo) y se añade un elemento a ella cada vez que se recupera de COLA el elemento de distancia mínima (paso 4 del algoritmo).

Para verificar la validez del algoritmo de enrutamiento propuesto se va a probar por inducción que para cada ranura r perteneciente a uno de los subconjuntos S contenidos en RUTA la distancia $d(r)$ corresponde a la longitud de la ruta mínima desde el punto inicial s hasta la ranura r .

En efecto, cuando el subconjunto S contiene un solo elemento este corresponde a la ranura cuyo punto de distancia mínima al origen es el punto inicial s . La longitud de la ruta mínima desde el punto inicial s hasta si mismo es 0, de ahí que se inicializa la variable d en cero (paso 0 del algoritmo).

En el caso general, cuando el subconjunto S contiene más de un elemento. Sea w la ranura recuperada desde el frente de la cola de prioridades (paso 3 del algoritmo). Si $d[w]$ no es la longitud de la ruta mínima desde el punto inicial s hasta la ranura w entonces debe existir una ruta de longitud mínima P la cual debe contener alguna ranura diferente a w y que no esta contenida en S .

Sea x la primera de estas ranuras en P . Entonces la distancia desde el punto inicial s hasta la ranura x es más corta que la distancia $d[w]$ y además, la ruta mínima desde el punto inicial s hasta la ranura x esta contenida íntegramente en S excepto por la misma ranura x , tal como se muestra en la Fig.3.6.

Entonces, por la hipótesis de inducción se tendría que $d[v] < d[w]$, lo que constituye una contradicción al haberse recuperado a w del frente de la cola como la ranura de distancia mínima.

Se concluye entonces que no puede existir la ruta P y $d[w]$ es la longitud de la ruta mínima desde el punto inicial s hasta la ranura w . Para más detalle referente a este punto véase [10] y [3].

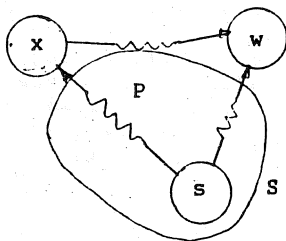


Fig. 3.6 Ruta mínima P .

3.6 COMPLEJIDAD DEL ALGORITMO.

Se debe distinguir al efectuar el análisis del algoritmo de enrutamiento las diversas operaciones que se ejecutan en los diferentes pasos del algoritmo:

Sea n el número de figuras de la gráfica de figuras.

La determinación de la figura a la cual pertenece la ranura que se propaga es $O(\log(n))$ por cada vez que se busque, pues las figuras de la gráfica están guardadas en una estructura de árbol.

La obtención de las nuevas ranuras provenientes de una propagación tiene que ver con el recorrido de la lista de figuras vecinas y ya se vió que ese recorrido puede ser, en el peor de los casos de $n/2$ figuras cada vez, por lo que el algoritmo en esta parte es $O(n^2)$ en el peor de los casos pudiendo llegar a ser $O(n)$.

La inserción de una ranura en la cola, la recuperación de la ranura de distancia mínima, y la eliminación de un elemento de la cola pueden ser efectuadas, cada una de ellas con un orden de $O(\log(r))$ cada vez, donde r es el número de ranuras.

Como pueden haber $O(n^2)$ ranuras el orden global del algoritmo de enrutamiento es de:

$$O(n^2 \log(n)).$$

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA.

- [1] Y.F.Wu, P. Widmayer, M.D.F. Schlag, C.K. Wong
"Rectilinear Shortest Paths and Minimum Spanning Trees in the Presence of Rectilinear Obstacles" IEEE Transactions on Computers. Vol C-36 No.3, March 1987. pp 321-331.
- [2] S.Futagami, J. Shirikawa, H. Ozaki.
"An Automatic Routing System for single-layer Printed Wiring Boards". IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol CAS-29, No.1, January 1982.pp. 46-51.
- [3] D.M. Mount
"Voronoi Diagrams on the Surface of a Polyhedron" Tech. Rept 121, Center for Automation Research, University of Maryland, (May 1985).
- [4] C.Y. Lee
"An algorithm for path connections and its applications". IRE Trans. Electron. Comp., vol EC-10, pp 346-365, Sept 1961.
- [5] T. Lozano Pérez
"Automated planning of manipulator transfer movements". IEEE Trans. Syst., Man, Cybern, vol SMC-11, pp 681-698, Oct 1981.
- [6] A. Guttman
"R-Trees: A dynamic index structure for spatial searching". ACM SIGMOD, Proc. SIGMOD-84, Vol 14, No 2, June 1984.
- [7] H. Samet
"The quadtree and related hierarchical data structures". Computing Surveys Vol 16, No 2, June 1984.
- [8] R.E. Tarjan
"Data Structures and Networks Algorithms". Society for Industrial and Applied Mathematics, 1983.
- [9] N. Deo
"Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science" Prentice-Hall, Inc. 1974.
- [10] A. Aho, J. Hopcroft, J. Ullman
"The Design and Analysis of Computer Algorithms". Addison-Wesley Publishing Co. 1974.

